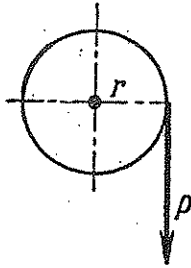


الباب الخامس

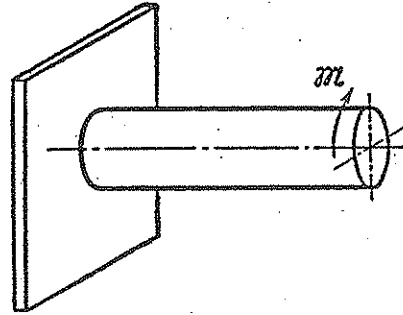
الالتواء

٣٤ - وضع الرسم البياني لعزوم الى

ان القضيب او العمود يتعرض للالتواء، اذا ما ظهرت في مقاطعه العرضية عزوم اللي، اى العزوم التى تكون فى مستوى المقطع. وتظهر عزوم اللي الداخلية M_t هذه، عادة، تحت تأثير العزوم الخارجية (الشكل ١-٥). وكقاعدة، فان العزوم الخارجية تنتقل للعمود فى مواضع ربطه بالبكرات، والعجلات المستننة، وما شابه ذلك.



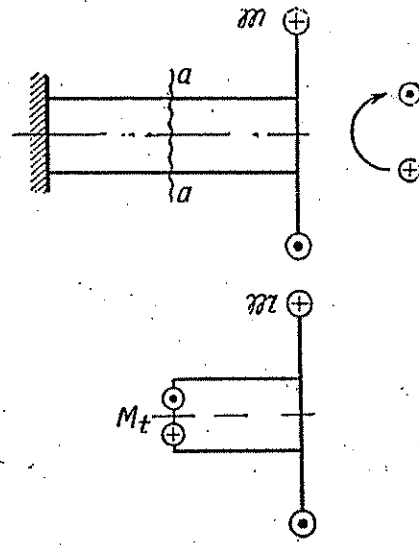
الشكل ٥ - ٢



الشكل ٥ - ١

ولكن، حتى الحمل العرضى الذى يتزاح بالنسبة لمحور القضيب فانه يسبب عزوم لى داخلية (الشكل ٥ - ٢)، ولكن فى الحالة المذكورة، وبالإضافة الى عزوم اللي تظهر فى المقاطع العرضية للقضيب قوى داخلية اخرى - وهى قوى القص وعزوم الحناية. فى هذا الباب سنبحث حساب الالتواء نتيجة تأثير الحمل الاستاتيكي.

اما حساب الاعمدة التى تعمل تحت تأثير عزوم اللي المتغيرة مع الزمن (حساب الطاقة)، فسيبحث فى الباب الثانى عشر.



الشكل ٥ - ٣

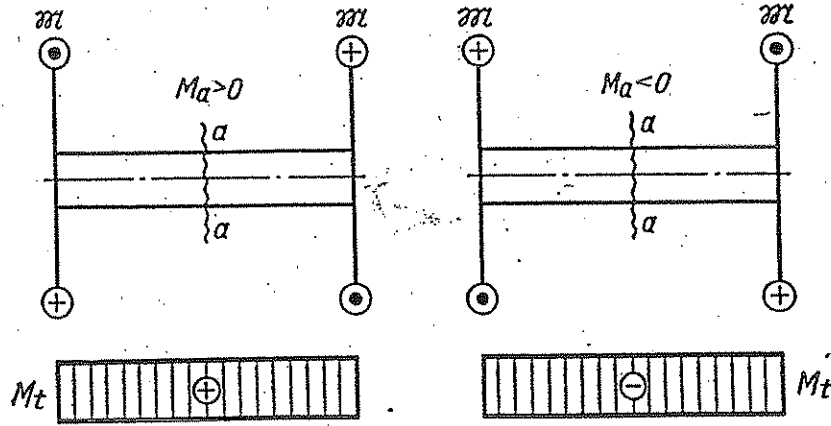
ترمز الى بداية السهم نحونا، وفى الاخرى اشارة (+) تشير الى طرف السهم المتجه من ناحيتنا (الشكل ٥ - ٣).

ولتحديد عزوم اللي M_t التى تظهر فى مقاطع القضيب تحت تأثير عزوم الى الخارجية او الحمل المستعرض، فاننا سنستعمل طريقة القطع. نتصور وجود مقطع للقضيب (الشكل ٥ - ٣) مثلاً $a - a$ ، ونهمل قسماً واحداً من القضيب. فى حالتنا هذه، نهمل القسم الايسر، ونبحث توازن القسم الايمن الباقي.

نستبدل الفعل المتبادل لاقسام القضيب بعزم اللي M_t ، الذى يعادل العزم الخارجى M_t . ولتوازن القسم المقطوع من الضرورى ان يكون المجموع الجبرى لكل العزوم التى تؤثر عليه مساوياً للصفر. وفى هذه الحالة، نحصل على $M_t = M_t$. اما اذا كانت تؤثر على القسم الباقي عدة عزوم خارجية، فبنفس الطريقة، يمكن التأكد بان عزم اللي فى المقطع يساوى عددياً، المجموع الجبرى لعزوم الى الخارجية التى تؤثر على جهة واحدة من المقطع.

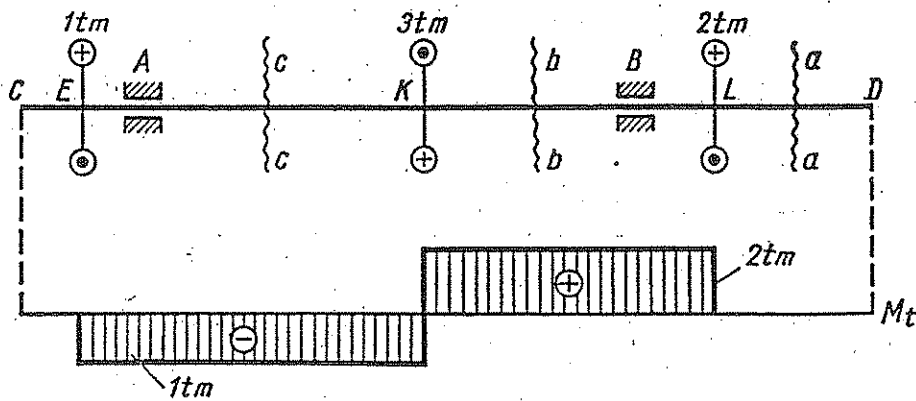
ولتكوين فكرة واضحة عن طبيعة توزيع ومقدار عزوم اللي على طول القضيب، نخطط رسوماً بيانية لهذه العزوم. ان هذه الرسوم البيانية تشبه جداً الرسوم البيانية للقوى الطولية فى حالة الشد او الانضغاط. واتخطيط الرسوم

البيانية، يجب الاتفاق على قاعدة للإشارات مقدما. حيث لا توجد قاعدة عامة لاستعمال الاشارات لعزوم اللي. وبالامكان استعمال اية قاعدة للإشارات. والمهم هنا، ان القاعدة يجب ان تبقى مستعملة من اول الرسم البياني الى اخره.



الشكل ٥ - ٤

لنستعمل قاعدة الاشارات التالية (الشكل ٥ - ٤). يعتبر عزم اللي في المقطع $a-a$ موجبا عندما يحاول العزم الخارجى ادارة القسم المقطوع عكس اتجاه دوران عقرب الساعة، فيما اذا كنا ننظر الى القسم المقطوع من جهة المقطع. اما اذا حاول العزم الخارجى ادارة القسم المقطوع باتجاه دوران عقرب الساعة (عند النظر من جهة المقطع)، فان عزم اللي في المقطع يعتبر سالبا.



الشكل ٥ - ٥

ولتوضيح كيفية تخطيط الرسوم البيانية لعزوم اللي نشرح المثال التالي (الشكل ٥-٥): نبحث العمود CD ، المستند على المعامل A و B وهو في حالة توازن تحت تأثير العزوم المسلطة عليه في المقاطع E ، K و L . وبأحداث المقطع $a-a$ في مكان ما من القسم DL وفحص حالة توازن القسم الايمن المقطوع، فاننا نتأكد من ان $M'_i = 0$. واذا احدثنا بعد ذلك مقطعا $b-b$ في مكان ما من القسم LK ، فمن شروط توازن القسم الايمن من المقطع نحصل على $M'_i = 2 \text{ tm}$.

نعتبر العزم موجبا، طبقا لقاعدة الاشارات التي اتخذناها. وبأحداث مقطع $c-c$ في القسم KE ، فمن شروط توازن القسم الايمن، نحصل على:

$$2 - 3 - M'_i = 0$$

حيث:

$$M'_i = -1 \text{ tm}.$$

ان الرسم البياني الذي نحصل عليه، له شكل مستطيلين. ومن المهم ان نلاحظ ان الاحداثيات الرأسية للرسم في مواضع تأثير العزوم الخارجية، تتغير بصورة متدرجة بمقدار العزم الخارجى المؤثر هناك.

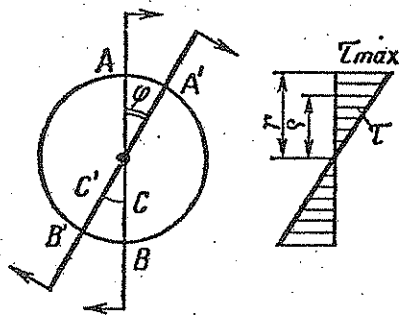
واذا كانت الاحمال المستعرضة التي تسبب التواء القضيب معطاة لنا (انظر الشكل ٥-٢)، فنحسب مسبقا عزوم اللي الخارجية، التي سببتها هذه القوى. وفي الحالة الموضحة في الشكل ٥-٢، فان عزم اللي الخارجى بتأثير القوة P يساوى $M = Pr$. وبعد تحديد العزوم الخارجية، تحدد عزوم اللي الداخلية وتخطط الرسوم البيانية كما هو مذكور اعلاه.

٣٥- تحديد الاجهادات في القضبان ذات المقطع الدائري

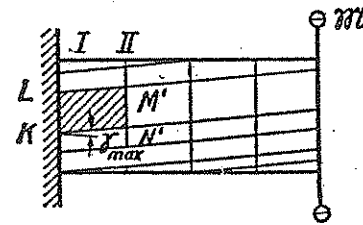
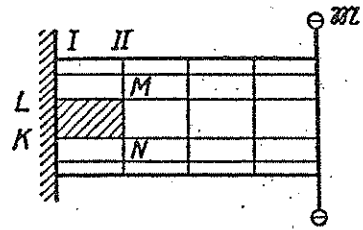
ان عزم اللي (التواء) الذي جرى الحديث عنه، يمثل محصلة القوى الداخلية فقط. وبالحقيقة، ففي المقطع العرضى للقضيب المملوء، تؤثر قوى مماسية (قص) داخلية موزعة باستمرار، ونأتى الان على كيفية تحديدها.

لتعرف قبل كل شئ على بعض نتائج التجارب. اذا احداثا على سطح قضيب ذى مقطع دائرى، شبكة خطوط مستطيلة، سنلاحظ بعد التشوه (الشكل ٥-٦) ما يلى:

١- ان الشبكة المستطيلة تتحول الى شبكة متكونة من متوازيات اضلاع، تشهد على وجود الاجهادات المماسية فى المقاطع العرضية للقضيب وتظهر ايضا فى المقاطع الطولية وذلك حسب قانون ازدواج الاجهادات المماسية (اجهادات القص).



الشكل ٥-٧



الشكل ٥-٦

٢- المسافة بين الدوائر مثلا بين I و II ثابتة، ولا يتغير طول القضيب وقطره. وهذا يشهد على انعدام الاجهادات العمودية فى المقاطع العرضية والطولية للقضيب.

وعلى هذا الاساس فعند الالتواء تؤثر اجهادات القص فقط فى المقاطع العرضية والطولية اى ان حالة الاجهاد فى نقاط القضيب الملوى هى حالة اجهاد القص البحت.

٣- يدار قطر المقطع النهائى AB (الشكل ٥-٧) بزاوية معينة φ نسبة الى وضعيته الاولى ويبقى خطا مستقيما. ومن الطبيعى ان نفرض بان انصاف اقطار المقاطع العرضية الباقية ايضا، ستدار وتبقى مستقيمة. وقد اثبت التجارب صحة الصيغ التى حصل عليها استنادا الى ذلك الافتراض. تتراوح النقطة A بالقوس AA' ، والنقطة C بقوس اصغر هو CC'.

ولوضع قانون توزيع اجهادات القص في المقطع العرضي للقضيب الملولى،
نبحث تشوهات القضيب بتفصيل اكثر (الشكلان ٥-٦ و ٥-٨). ويبين
في الشكل ٥-٨ بمقياس رسم كبير قسم القضيب الواقع بين المقطعين I
و II، وكذلك الجهة الواحدة KN للجزء KLMN.

ان زاوية القص للجزء KLMN الذى يقع على سطح القضيب (الشكل
٥-٦) تساوى نسبة القطعة MN' الى طول الجزء dz (الشكل ٥-٨).

$$(١-٥) \quad \gamma_{\max} = \frac{r d\varphi}{dz}.$$

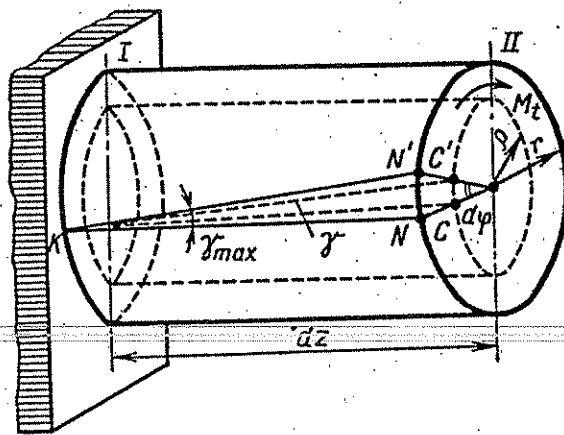
لنقطع بمخيلتنا اسطوانة ذات نصف قطر اختيارى ρ من قسم القضيب
موضع البحث. نعيد نفس المناقشة ونحصل على زاوية القص للجزء الذى يبعد
عن محور القضيب بمسافة ρ :

$$(٢-٥) \quad \gamma = \frac{\rho d\varphi}{dz}.$$

واستنادا الى قانون هوك فعند القص نحصل على:

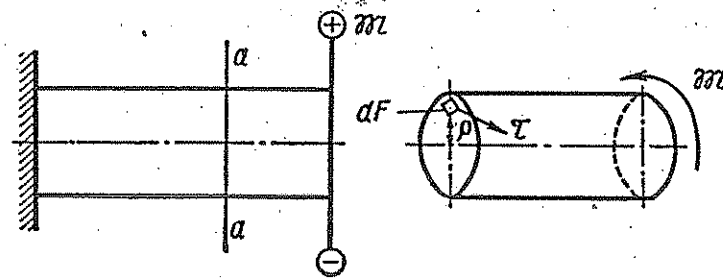
$$(٣-٥) \quad \tau = G\gamma = G\rho \frac{d\varphi}{dz}.$$

وكما نرى، فعند الالتواء، تتناسب تشوهات القص والاجهادات المماسية
تناسبا طرديا مع البعد عن مركز الثقل (المركز المتوسط للمقطع).



الشكل ٥-٨

ان الرسم البياني للاجهادات المماسية في المقطع العرضي للقضيب مبين في الشكل ٥ - ٧ على الجهة اليمنى.
ان اجهادات القص في مركز ثقل المقطع العرضي تساوى صفرا. وتوجد اجهادات القص العظمى في نقاط المقطع الواقعة قرب سطح القضيب. وبمعرفة قانون توزيع اجهادات القص، من السهل تحديد مقدارها من شروط التوازن .



الشكل ٥ - ٩

ولنبحث الآن في توازن قسم القضيب الذي يقع الى يمين المقطع (الشكل ٥ - ٩). يجب ان يكون المجموع الجبرى للعزوم بالنسبة لمحور القضيب والتي تؤثر على القسم المقطوع مساويا للصفر.

$$(٥-٤) \quad M - \int_F \tau \rho dF = 0$$

حيث $\tau \rho dF$ - عزم اللي الاولى للقوى الداخلية التى تؤثر على المساحة dF .
 $\int_F \tau \rho dF$ - عزم اللي فى المقطع موضع البحث.

وعندما نعوض هنا قيمة الاجهادات المعطاة فى الصيغة (٥ - ٣) نحصل على:

$$(٥-٥) \quad M - G \frac{d\varphi}{dz} \int_F \rho^2 dF = 0.$$

مع الاخذ فى الاعتبار ان:

$$(٥-٦) \quad \int_F \rho^2 dF = J_p$$

وبما ان J_p - عزم القصور الذاتي القطبي للمقطع ، نحصل على :

$$(٧-٥) \quad \frac{d\phi}{dz} = \frac{M}{GJ_p}.$$

وبتعويض قيمة $\frac{d\phi}{dz}$ في الصيغة (٥-٣) ، يكون عندنا :

$$(٨-٥) \quad \tau = \frac{M}{J_p} \rho.$$

واذا اثر على القسم المقطوع للتضيب العزم الخارجى M وكذلك عدة عزوم خارجية ، فان المجموع الجبرى لهذه العزوم الخارجية والذي يساوى بالمقدار عزم الى الداخلى M_t (راجع البند ٣٤) سيدخل في الصيغة (٥-٤) والصيغ التي تليها.

وعلى هذا الاساس ، فان الصيغة النهائية لتحديد اجهادات القص عند الالتواء ، تكون على الصورة التالية :

$$(٩-٥) \quad \tau = \frac{M_t}{J_p} \rho.$$

ويستخلص من هذه الصيغة ، ان الاجهادات τ تكون متساوية في النقاط المتساوية البعد عن مركز المقطع .

ان الاجهادات العظمى في النقاط التي تقع قرب محيط المقطع :

$$(١٠-٥) \quad \tau_{\max} = \frac{M_t}{J_p} r = \frac{M_t}{W_p}$$

حيث :

$$(١١-٥) \quad W_p = \frac{J_p}{r}.$$

ان الخاصية الهندسية W_p ، تسمى بعزم المقاومة القطبى او عزم المقاومة

عند الالتواء.

للمقطع الدائرى الصلب (الاصل) :

$$(١٢-٥) \quad W_p = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi d^4}{32d/2} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0.2d^3.$$

للمقطع الحلقي:

$$(١٣-٥) \quad W_p = \frac{2J_p}{D} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4) \approx 0.2 D^3 (1 - c^4)$$

حيث:

$$c = \frac{d}{D}$$

شروط المتانة الاستاتيكية للعمود عند الالتواء تكون:

$$(١٤-٥) \quad \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} \leq [\tau]$$

وهنا $[\tau]$ - اجهاد القص المسموح به.
وعند تأثير الحمل الاستاتيكي فاننا نعتبر

$$[\tau] = (0.5 \div 0.6) [\sigma_t]$$

وعدا التأكد من المتانة، فبواسطة هذه الصيغة يمكن اختيار قطر العمود ايضا، او تحديد عزم اللي المسموح به، عندما تكون المقادير الاخرى معلومة. وبالأخذ في الاعتبار، ان للمقطع الدائري الاصم $W_p = 0.2 d^3$ نحصل على:

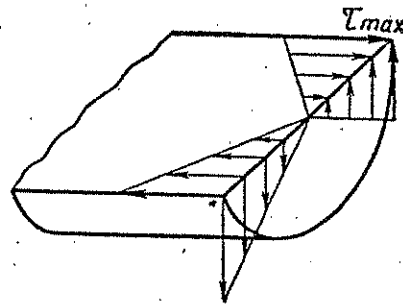
$$(١٥-٥) \quad d = \sqrt[3]{\frac{M_t}{0.2[\tau]}} = 1.72 \sqrt[3]{\frac{M_t}{[\tau]}}$$

وبواسطة هذه الصيغة يحدد قطر العمود، انطلاقا من شروط المتانة. وحسب شروط المتانة، فان عزم اللي المسموح به يحدد بالصيغة التالية:

$$(١٦-٥) \quad [M_t] = W_p [\tau]$$

ولا تؤثر الاجهادات المماسية في المقاطع العرضية للقضيب فحسب، وانما في المقاطع الطولية ايضا (الشكل ١٠ - ٥). وهذا ما يستخلص من قانون ازدواج الاجهادات المماسية.

وفي المقاطع المائلة للقضيب تؤثر
الاجهادات العمودية والتماسية. ويمكن حسابها
بواسطة الصيغ الواردة في الباب الثاني.
ان الاهمية الكبرى تتمثل في الاجهادات
الرئيسية، ويمكن تحديدها بواسطة الصيغ

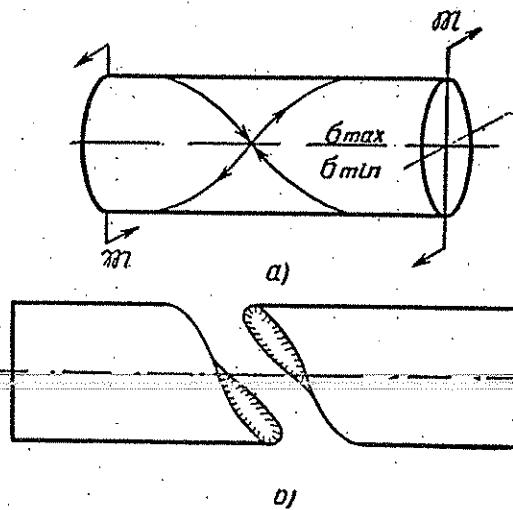


الشكل ١٠ - ٥

(٢ - ٣٦)، بعد ان نعوض فيها $\sigma_3 = \sigma_2 = 0$

وبنفس الطريقة نكتشف ان $\sigma_1 = \sigma_{max} = \tau$ و $\sigma_3 = \sigma_{min} = -\tau$ وتعبر
الاولى هنا شادة والثانية ضاغطة. وحسب الصيغة (٢ - ٣٥) نجد ان زاوية
ميل المساحات الرئيسية هي $\alpha'_0 = 45^\circ$ و $\alpha''_0 = 135^\circ$ (الشكل ٥ - ١١، α).
ولقد اظهرت التجارب ان المواد الهشة - حديد الزهر مثلاً - تتحطم بسطح
مستو عند الالتواء (وبصورة ادق، بسطح لولبي) يميل عن محور العمود
بزاوية 45° (الشكل ٥ - ١١، b)، اي بتلك المستويات التي تؤثر عليها الاجهادات
الشادة العظمى.

اذن، فعند الالتواء تنشأ حالة اجهاد ثنائية المحور - اي قص بحت في
جميع نقاط القضيب عدا نقاط محوره، (حيث لا يظهر في المحور اي
اجهاد). وعند الالتواء تكون المادة التي على سطح القضيب مجهددة اكثر من



الشكل ١١ - ٥

المادة التي تقع بالقرب من محور القضيب. وعلى هذا الأساس تعتبر حالة الاجهاد غير متجانسة. اذا حصل الالتواء لانبوب رفيع الجدران فيصبح بالامكان عمليا، ظهور اجهادات متساوية في كافة نقاط سطحه اى ان في هذه الحالة تكون حالة الاجهاد متجانسة. ان التجارب على التواء مثل هذه الانابيب، تستعمل عادة لدراسة القص الصافى (البحت) وخاصة لتحديد مقدار حد الخضوع عند القص τ_v .

٣٦ - العلاقة بين العزم الذى ينقله العمود، والقدرة، والسرعة الزاوية

في المسائل التكنيكية عادة، تعطى لنا القدرة التي ينقلها العمود، وسرعته الزاوية، التي يعبر عنها بعدد الدورات في الدقيقة. وبواسطة هذه المعطيات بحسب العزم M ، الذي ينقله العمود. وكما هو معروف، فان القدرة (القدرة الحصانية) تساوى:

$$(١٧-٥) \quad N = \frac{Pv}{75} = \frac{P \cdot 2\pi rn}{75 \times 60}$$

حيث P - القوة المحيطة التي تؤثر على العمود،

v - سرعة النقاط على سطح العمود،

n - عدد دورات العمود في الدقيقة.

وبما ان $Pr = M$ فاننا، نحصل من الصيغة (١٧-٥) على:

$$(١٨-٥) \quad M = 716.2 \frac{N \text{ hp}}{n \text{ rpm}} \text{ kg m}$$

واذا اعتبرنا ان 1 hp تساوى 0.736 kw ، نحصل على:

$$(١٩-٥) \quad M = \frac{716.2 K}{0.736 n} = 974.2 \frac{K}{n} \text{ kg m}$$

حيث K - القدرة، ويعبر عنها بالكيلوواط.

٣٧ - التشوهات والازاحات عند الالتواء قضيب
ذى مقطع دائري

لحساب تشوهات القضيب عند الالتواء نستعمل الصيغة (٥-٧)
وسنعتبر $M_t = M_t$ طبقا لما ذكر اعلاه:

$$d\varphi = \frac{M_t dz}{GJ_p}$$

ولايجاد زاوية الالتواء الكاملة φ على الطول z ، المقاس من مكان تثبيت نهايته،
نأخذ تكامل الصيغة السابقة في الحدود من 0 حتى z :

$$\varphi = \int_0^z \frac{M_t dz}{GJ_p}$$

واذا كان عزم اللي، ومقدار GJ_p الذى يسمى بالصلابة (جسوء) عند
الالتواء، ثابتين طوال عملية التكامل، فان:

$$\varphi = \frac{M_t z}{GJ_p}$$

وكما يتضح من هذه الصيغة، فكلما نبتعد عن النهاية المثبتة، (المقطع
الثابت) كلما تزداد زاوية الالتواء ازديادا «خطيا».
وتكون زاوية الالتواء العظمى فى نهاية القضيب، اى عند $z=l$

$$\varphi = \frac{M_t l}{GJ_p}$$

ان هذه الصيغة بتركيبها تشبه صيغة تحديد التشوهات عند الشد او الانضغاط.
ان زاوية الالتواء لوحدة الطول، تسمى بزاوية الالتواء النسبية وتساوى

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_t}{GJ_p}$$

ولتأمين الصلابة المطلوبة للعمود، من الضروري ان لا تزيد زاوية الالتواء النسبية العظمى، عن الزاوية المسموح بها، اى:

$$\theta = \frac{M_t}{GJ_p} \leq [\theta] \quad (24-5)$$

وتعتبر هذه الصيغة عن شروط صلابة القضيب ذى المقطع الدائرى عند الالتواء. وفي هذه الصيغة تكون θ هى زاوية الالتواء النسبية المسموح بها، ويعبر عنها بعدد الزوايا نصف القطرية لكل وحدة طول من العمود. وفي اغلب الحالات يعطى مقدار زاوية الالتواء النسبية المسموح بها بوحدات هى: درجة/ ١ متر طول، عند ذلك، بدلا من الصيغة (٢٤-٥) يكون لدينا:

$$\theta = \frac{180}{\pi} \frac{M_t \cdot 100}{GJ_p} \leq [\theta] \quad (25-5)$$

ان مقدار $[\theta]$ يختار نسبة الى وظيفة العمود وابعاده. وللاعمدة ذات الابعاد المتوسطة، يوصى فى دليل بناء الماكينات: بان تؤخذ زاوية الالتواء المسموح بها مساوية لـ ٥٠ درجة / ١ متر طول.

الجدول ١-٥

قيم المعاملات A و B الموجودة فى الصيغ (٢٦-٥) و (٢٧-٥)

المعاملات	زاوية الالتواء المسموح بها درجة ١ متر					
	٠,٢٥	٠,٥	١,٠	١,٥	٢,٠	٢,٥
A	١٢	١٠	٨,٥	٧,٧	٧,٢	٦,٨
B	٠,٧٣	٠,٦٢	٠,٥٢	٠,٤٧	٠,٤٤	٠,٤٢

ومن الصيغة (٥ - ٢٥)، يمكن تحديد قطر العمود حسب الصلابة (الجسوء) المعطاة. آخذين في الاعتبار، ان $J_p = 0.1 d^4$ ، حيث نحصل على:

$$(٢٦-٥) \quad d = \sqrt[4]{\frac{180 M_t 100}{\pi G 0.1 [\theta]}} = B \sqrt[4]{M_t}$$

$$(٢٧-٥) \quad d = A \sqrt[4]{\frac{N}{n}}$$

حيث N - القدرة التي ينقلها العمود ويعبر عنها بالقوة الحصانية.

n - السرعة الزاوية للعمود، ويعبر عنها بعدد الدورات في الدقيقة rpm

ان المعاملين B, A يحددان كدالة $[\theta]$ حسب الجدول ٥-١ (عند $G = 8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$).

$[\theta]$ - زاوية الالتواء النسبية المسموح بها، درجة/متر، ونحصل على القطر مقاسا بالاستمترات.

٣٨ - تخطيط الرسوم البيانية لزوايا الالتواء

لكي نتعرف ايضا حيا على طبيعة تغير زوايا الالتواء على طول القضيب، نخطط احيانا رسوما بيانية لزوايا الالتواء (الرسوم البيانية لزوايا دوران المقاطع العرضية).

ان طريقة تخطيط الرسوم البيانية هذه موضحة في المثال المبحوث في البند ٣٤ (الشكل ٥-١٢، a)، حيث نخطط الرسم البياني لعزوم اللي مسبقا (الشكل ٥-١٢، b). وبما ان العمود في حالة دوران، اذن لا يوجد هنا مقطع ثابت. ولكن تهمننا فقط زوايا دوران المقاطع، التي تكونت نتيجة لتشوهات القضيب. ولتخطيط الرسم البياني لزوايا الالتواء يمكن اتخاذ اي مقطع، واعتباره مقطعا ثابتا اصطلاحيا، مثلا المقطع A . نحدد دوران المقطع B نسبة الى المقطع A . ولاجل هذا نستعمل الصيغة (٥-٢٢). وتحدد زاوية الالتواء بواسطة عزم اللي الداخلي $M_{AB} = 1 \text{ tm}$ الذي يؤثر في المقاطع العرضية للقضيب في القسم AB :

$$\varphi_{BA} = \frac{M_{AB} l_{AB}}{G J_p}$$

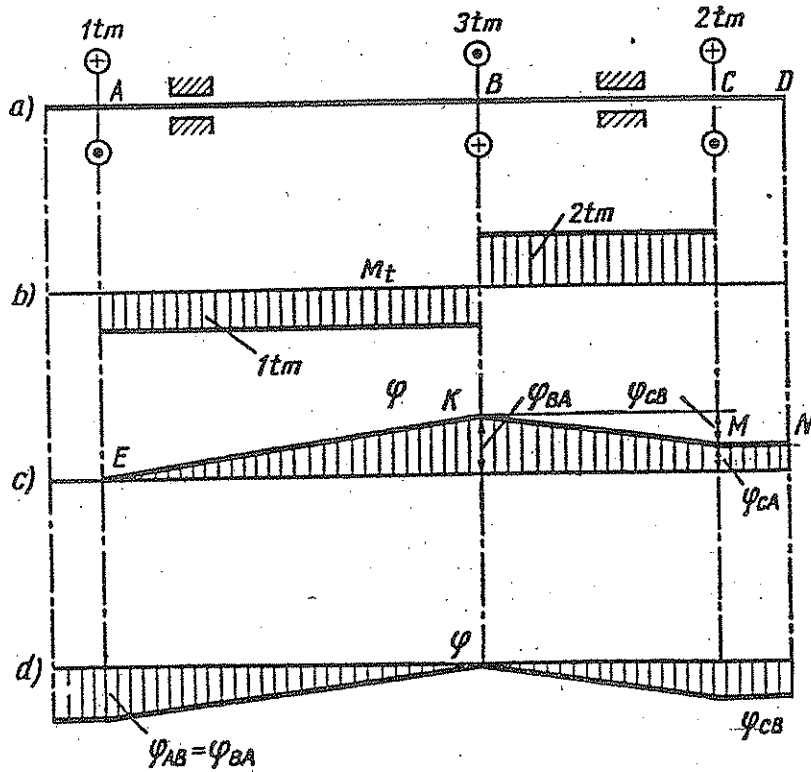
حيث l_{AB} - طول القسم AB .

وهنا نستعمل قاعدة الاشارات التالية لزوايا الالتواء: نعتبر الزاوية φ موجبة، اذا كان دوران المقطع باتجاه دوران عقرب الساعة، وذلك عند النظر من اليسار الى اليمين. في حالتنا هذه تكون الزاوية φ_{BA} موجبة. وحسب مقياس الرسم المتخذ، نضع الاحداثي الرأسى للزاوية φ_{BA} (الشكل ٥ - ١٢، c) وبعد الحصول على النقطة K نوصلها بالنقطة E بواسطة خط مستقيم، وذلك لان الزوايا فى القسم AB تتغير حسب قانون خطى. ونحسب الان زاوية دوران المقطع C نسبة الى المقطع B. وبالاخذ فى الاعتبار قاعدة الاشارات المتخذة لزوايا الالتواء، نحصل على:

$$\varphi_{CB} = - \frac{M_{BC} l_{BC}}{GJ_p}.$$

وبما ان المقطع B غير ثابت (متحرك)، فان زاوية دوران المقطع C نسبة الى المقطع A، تساوى:

$$\varphi_{CA} = \varphi_{CB} + \varphi_{BA} = - \frac{M_{BC} l_{BC}}{GJ_p} + \varphi_{BA}.$$



الشكل ٥ - ١٢

ويمكن ان تكون زاوية الالتواء φ_{CA} موجبة او سالبة وفي حالة خاصة قد تساوى صفرا.

لنفرض الآن ان زاوية φ_{CA} في حالتنا هذه تكون موجبة. فعند ذلك نضع هذا المقدار، حسب مقياس الرسم المتخذ، في اعلى محور الرسم البياني، ونحصل على النقطة M . نوصل M بالنقطة K فنحصل على الرسم البياني لزاوية الالتواء φ في القسم BC . وفي القسم CD لا يحدث التواء ($M_{CD} = 0$)، وهذا يعني ان جميع المقاطع هناك تدار بنفس المقدار الذي يدار به المقطع C . وفي القسم MN ، يكون الرسم البياني φ افقيا. ونقترح على القارئ ان يتأكد، بانه اذا اعتبر المقطع B كمقطع ثابت فان الرسم البياني لزاوية الالتواء سيكون كما هو عليه في الشكل ٥-١٢، d .

مثال ٥-١. يراد تحديد قطر عمود فولاذي، يدور بسرعة زاوية قدرها ٣٠٠ دورة في الدقيقة، وينقل قدرة مقدارها ٥٠٠ حصان. مع العلم بان الاجهاد المسموح به هو 800 kg/cm^2 ، $[\tau] = 800 \text{ kg/cm}^2$ ، وزاوية الالتواء المسموح بها هي $[0] = 0.5^\circ \text{ per m}$ ، $G = 8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$.

الحل. يحدد العزم الذي ينقله العمود، حسب الصيغة (٥-١٨)

$$\mathfrak{M} = 71620 \frac{N}{n} = 71620 \frac{500}{300} = 119 \times 10^3 \text{ kg cm}$$

يكون عزم اللي في جميع المقاطع العرضية للعمود متساو، ويساوي

$$M_t = \mathfrak{M} = 119 \times 10^3 \text{ kg cm}$$

يحدد قطر العمود حسب المتانة بواسطة الصيغة (٥-١٥):

$$d = 1.72 \sqrt[3]{\frac{M_t}{[\tau]}} = 1.72 \sqrt[3]{\frac{119 \times 10^3}{800}} = 9.1 \text{ cm}$$

وبواسطة زاوية الالتواء المسموح بها، الموجودة في الجدول ٥-١، نحدد المعامل $B = 0.62$ ، وبواسطة الصيغة (٥-٢٦)، نحدد قطر العمود حسب شروط الصلابة:

$$d = 0.62 \sqrt[4]{119 \times 10^3} = 11.5 \text{ cm}$$

ويحدد قطر العمود في حالتنا هذه حسب شروط الصلابة، ويجب ان يساوى $d = 11.5 \text{ cm}$.

مثال ٥ - ٢. يراد اختيار ابعاد مقطع انبوبي بحيث ينقل عزما قدره $M = 600 \text{ kg} \cdot m$ عندما تكون نسبة الاقطار $c = \frac{d}{D} = 0.8$ والاجهاد المسموح به $[\tau] = 600 \text{ kg/cm}^2$ وكذلك مقارنة وزن هذا العمود الانبوبي بوزن عمود يساويه في المقاومة له مقطع أصم.

الجواب. ان ابعاد العمود الانبوبي $d = 7.62 \text{ cm}$ ، $D = 9.52 \text{ cm}$ ومساحة المقطع: $F_h = 25.9 \text{ cm}^2$. وقطر العمود الاصم: $d_1 = 8 \text{ cm}$ ، ومساحة المقطع: $F_s = 50.2 \text{ cm}^2$. ويساوى وزن العمود الانبوبي ٥١٪ من وزن العمود الاصم.

٣٩ - طاقة الوضع عند الالتواء

تقوم العزوم الخارجية بالشغل نتيجة دوران المقطع الذى اثيرت عليه تلك العزوم. ويصرف هذا الشغل لاجل تكوين احتياطي طاقة وضع التشوه، الذى يساوى عدديا شغل القوى الداخلية.

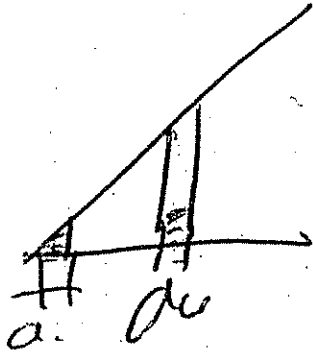
وبنفس الطريقة التى اتبعت عند الشد، يمكن البرهنة على ان شغل عزم الالتواء الخارجى الاستاتيكي التأثير يساوى نصف حاصل ضرب القيمة النهائية للعزم فى قيمة الزاوية النهائية للالتواء:

$$A = \frac{1}{2} M_1 \varphi_1 \quad (٥-٢٨)$$

ان اشارة شغل القوى الداخلية سالبة. ويساوى شغل عدديا طاقة الوضع عند الالتواء، ويحسب بنفس الطريقة التى حسب بها شغل القوى الداخلية عند الشد (الانضغاط).

الشغل الاولى للقوى الداخلية يساوى:

$$dU = -\frac{1}{2} M_1 d\varphi$$



حيث M_i - عزم اللي الداخلي،
 $d\phi$ - زاوية الالتواء لجزء طوله dz .
 ولكن حسب الصيغة (٧-٥) يكون لدينا:

$$d\phi = \frac{M_i dz}{GJ_p}.$$

اذن:

$$dU = -\frac{1}{2} \frac{M_i^2 dz}{GJ_p}.$$

ونحصل على الشغل الكامل للقوى الداخلية، بأخذ تكامل صيغة الشغل
 الاولى على كل طول القضيب l :

$$U = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_i^2 dz}{GJ_p}.$$

ولحساب طاقة الوضع التي تساوى بالمقدار شغل القوى الداخلية، وتعاكسه
 بالاشارة، يكون لدينا:

$$\Pi = -U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_i^2 dz}{GJ_p}. \quad (٢٩-٥)$$

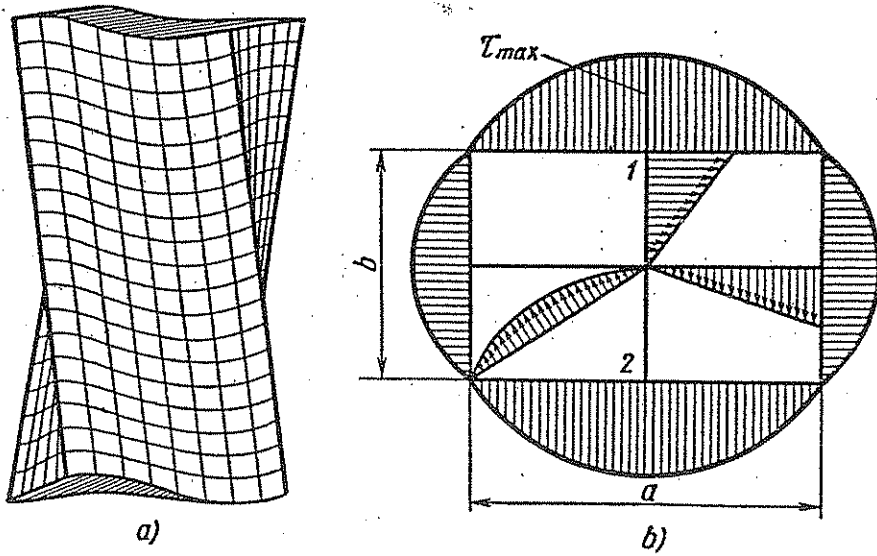
واذا كان مقدار عزم اللي وصلابة القضيب ثابتين على طول القضيب كله،
 نحصل على:

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{M_i^2 l}{GJ_p}. \quad (٣٠-٥)$$

ان هذه الصيغة تشبه بتركيبها الصيغة $\Pi = \frac{N^2 l}{2EF}$ التي استعملت لحساب طاقة
 الوضع عند الشد (الانضغاط).

٤٠ - النتائج الرئيسية لنظرية التواء القضبان ذات المقاطع غير الدائرية

ان مقاطع مثل هذه القضبان اثناء الالتواء لا تبقى مستوية، بل تكون معوجة (ملتوية) (الشكل ٥ - ١٣، a).
واذا لم تقابل هذا الاعوجاج اية عوائق ففي المقاطع العرضية لا تظهر اجهادات عمودية. ويسمى مثل هذا الالتواء خالصا او حرا.



الشكل ٥ - ١٣

ويمكن حدوث الالتواء الحر فقط بشرط ان يكون مقطع القضيب ومقدار هزم الى ثابتين، وان لا تكون نهايتا القضيب مثبتتين.
ان تحديد الاجهادات المماسية للقضبان ذات المقاطع غير الدائري يعتبر مسألة صعبة بحد ذاتها، وتحل بطرق نظرية المرونة. ونأتى هنا بالنتائج الرئيسية للقضبان ذات المقاطع المستطيل حيث $a > b$ (الشكل ٥ - ١٣، b).
ان الاجهادات المماسية العظمى تظهر في النقاط 1 و 2 اى في منتصف الابعاد الطويلة، وتساوى:

$$(٥-٣١) \quad \tau_{\max} = \frac{M_t}{a b^2} = \frac{M_t}{W_t}$$

وزاوية الالتواء تساوى:

$$(٣٢-٥) \quad \varphi = \frac{M_t l}{G \beta a b^3} = \frac{M_t l}{G J_t}$$

وتعتبر المقادير $W_t = \alpha a b^2$ و $J_t = \beta a b^3$ مناظرة للخصائص الهندسية لمتانة وصلابة (جسوء) القضيب ذى المقطع المستطيل، عند الالتواء. وهنا α و β معاملان يعتمدان على نسبة الاضلاع. وفي الجدول ٥-٢ توجد قيم هذين المعاملين.

الجدول ٥-٢

قيم المعاملين α و β لحساب التواء القضبان ذات المقطع المستطيل

$a:b$	١	٢	٣	٤	٥	١٠	٢٠	∞
α	٠,٢١	٠,٢٥	٠,٢٧	٠,٢٨	٠,٢٩	٠,٣١	٠,٣٢	٠,٣٣
β	٠,١٤	٠,٢٣	٠,٢٦	٠,٢٨	٠,٢٩	٠,٣١	٠,٣٢	٠,٣٣

ويتضح من الجدول، ان للمقاطع المستطيلة الضيقة التى تكون نسبة اضلاعها $\frac{a}{b} \geq 10$ يمكن اتخاذ $\alpha = \beta \approx \frac{1}{3}$.

وبيّن فى الشكل ٥-١٣ توزيع الاجهادات المماسية على محيط القضيب، وباتجاه محاور واقطار المقطع. وفى الزوايا والاركان: $\tau = 0$. اما لبقية المقاطع الجانبية (القطع الناقص، القطع الدائرى ذى حز المفتاح، وغيرها) فان صيغها الحسابية معطاة فى الدليل.

للمقاطع الجانبية التى تتكون من مستطيلات رفيعة طويلة ($\frac{a}{b} \geq 10$) يمكن حساب الخاصية الهندسية J_t بواسطة الصيغة:

$$(٣٣-٥) \quad J_t = \eta \frac{1}{3} \sum a b^3$$

حيث η - معامل يعتمد على شكل المقطع،

a - طول الاضلاع الكبيرة (الطويلة) للمستطيل،

b - طول الاضلاع الصغيرة (القصيرة) للمستطيل.

نوع المقطع	قيمة المعامل η
مقطع زاوى	١٠٠
مقطع شكل I	١٢٠
مقطع شكل T	١١٥
مجرى (مقطع شكل —)	١١٢

والاجهادات المماسية العظمى توجد فى المستطيل الذى له اكبر عرض،
وتحدد بالصيغة:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t b_{\max}}{J_t} \quad (٣٤-٥)$$

حيث $b_{\max}$ - اكبر قيمة لضلع المستطيل القصير.
وتحدد زاوية الالتواء بالصيغة التالية:

$$\varphi = \frac{M_t l}{GJ_t} \quad (٣٥-٥)$$

وللمقاطع الجانبية المدلفنة، تعطى قيمة J_t فى جداول خاصة. وتجدر
الاشارة الى ان المقدار J_t لمثل هذه المقاطع (الرقيقة الجدران وذات المقطع
الجانبى المفتوح) قليل جدا بمقارنته مع المقدار للقضبان ذات المقطع الدائرى
الاصم، الذى له نفس المساحة دون الاشارة الى المقطع الحلقى. ولذا فمن
المستحسن عدم استعمال مثل هذه القضبان عند الالتواء.

وفى الالتواء غير الحر او المقيد، حيث يصعب اعوجاج المقاطع العرضية
فان الصيغ المذكورة اعلاه غير صالحة للاستعمال. ان النظرية العامة للالتواء
المقيد للقضبان الرقيقة الجدران ذات المقطع الجانبى المفتوح، طورها
ف. فلاسوف حيث اثبت انه عند الالتواء المقيد تظهر فى المقطع العرضى اجهادات
عمودية وتماسية اضافية كبيرة، عدا الاجهادات المماسية للالتواء الخالص التى
حسب بالصيغ المذكورة اعلاه. ان شرح نظرية الالتواء المقيد للقضبان
الرقيقة الجدران يخرج عن نطاق موضوع مقاومة المواد المختصر.

٤١ - التواء القضبان الرقيقة الجدران ذات المقطع المغفل

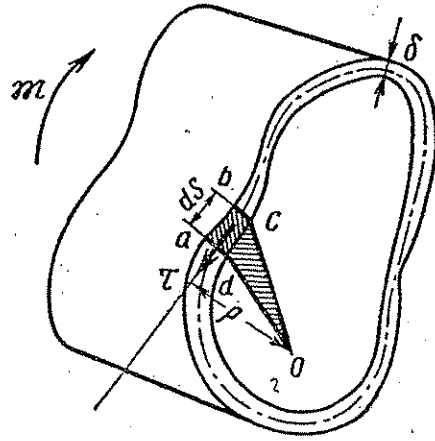
تعتبر القضبان الرقيقة الجدران ذات المقطع المغلق أكثر جسوءة ولذا فهي أكثر ملائمة للاستعمال عند الالتواء.

لنأخذ القضيب الاسطوانى المبين مقطعه العرضى فى الشكل ٥ - ١٤. نعتبر ان سمك الجدار δ يتغير بسلاسة حول المحيط، لذا من الممكن اهمال تركيز الاجهادات.

ونظرا لقلة سمك الجدار، فيمكن اعتبار الاجهادات المماسية التى تظهر عند الالتواء موزعة بصورة منتظمة على سمك الجدار.

ونأتى ايضا بالفرضية التالية التى اثبتها التجارب.

ان حاصل ضرب الاجهاد المماسى (اجهاد القص) فى اية نقطة من



الشكل ٥ - ١٤

الجدار فى سمك الجدار عند تلك النقطة هو مقدار ثابت لجميع النقاط التى تقع على الخط المحورى لمحيط المقطع. ويكتب هذا الشرط رياضيا بالشكل الاتى: $\tau\delta = C$.

ويمكن الان ربط مقدار الاجهاد المماسى مع عزم التواء الذى يظهر فى المقطع. ولاجل هذا نبحت توازن قسم القضيب (انظر الشكل ٥ - ١٤). ان القوة التى تؤثر على المساحة الاولى δds تساوى $\tau\delta ds$ ، اما عزم التواء لهذه القوة الاولى نسبة للنقطة الاختيارية O التى تقع على مستوى المقطع فانه يساوى $\tau\delta ds p$ حيث p - ذراع تأثير القوة نسبة الى النقطة O.

وللموازنة قسم القضيب المقطوع، من الضرورى ان يكون مجموع العزوم

بالنسبة للمحور الموازي لرأس سطح القضيب (generatrix) المار بالنقطة 0، مساويا للصفر.

$$\mathcal{M} - \int_s \tau \delta p ds = 0$$

حيث يمتد التكامل على طول المحيط s كله، ولكن حاصل $p ds$ يساوى ضعف مساحة المثلث Oab :

$$p ds = 2d\omega.$$

اذن:

$$\mathcal{M} - \int_{\omega} \tau \delta 2d\omega = 0.$$

وبما ان حاصل الضرب $\tau \delta$ هو مقدار ثابت، لذا يمكن نقله خارج علامة التكامل. ويبقى $\int_{\omega} d\omega$ تحت التكامل، ويمثل مساحة المقطع الاصلم التي يحددها الخط المركزى لسلك الجدار. عند ذلك:

$$\mathcal{M} - \tau \delta 2d\omega = 0. \quad (36-5)$$

عند تأثير عدة عزوم خارجية، فيدخل فى هذه الصيغة مجموع العزوم الخارجية التى تؤثر على القسم المقطوع، وهذا المجموع يعتبر من حيث المقدار بمثابة عزم الى الداخلى فى المقطع M_t ، وبأخذ هذا فى الاعتبار، نحصل من الصيغة (36-5) على:

$$\tau = \frac{M_t}{\delta 2\omega}. \quad (37-5)$$

وتوجد اكبر الاجهادات فى الموضع الذى يكون فيه سمك الجدار اقل:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\delta_{\min} 2\omega}. \quad (38-5)$$

وتحدد زاوية الالتواء φ لقضيب طوله l ، من شرط كون شغل عزم الالتواء الخارجى مساويا لشغل القوى الداخلية. ان شغل العزم الاستاتيكي الخارجى $\mathcal{M}$ الذى يؤثر بازاحة زاوية قدرها φ يساوى:

$$A = \frac{\mathcal{M}\varphi}{2}.$$

لنحسب الآن طاقة الوضع للتشوه، وتساوى عددياً شغل القوى الداخلية.
ان وحدة طاقة الوضع عند تأثير اجهادات القص تحدد حسب
الصيغة (٣-١٥):

$$u = \frac{\tau^2}{2G}.$$

وطاقة الوضع لجزء حجمه $\delta l ds$ تساوى:

$$d\Pi = \frac{\tau^2}{2G} \delta l ds$$

حيث l - طول القضيب.

وطاقة الوضع الكاملة لكل القضيب تساوى:

$$\Pi = \frac{l}{2G} \int_0^s \tau^2 \delta ds$$

ويؤخذ التكامل على طول محيط المقطع s .

ونعوض عن τ بقيمتها من الصيغة (٥-٣٦)، فنحصل على:

$$\Pi = \frac{l}{2G} \int_0^s \frac{M^2}{8^2 4 \omega^2} \delta ds.$$

وننقل المقادير الثابتة خارج علامة التكامل، نحصل على:

$$\Pi = \frac{M^2 l}{8G \omega^2} \int_0^s \frac{ds}{\delta}.$$

وعندما نعتبر ان طاقة الوضع Π تساوى عددياً شغل العزم الخارجى A ، نحصل
على:

$$\varphi = \frac{M l}{4G \omega^2} \int_0^s \frac{ds}{\delta}.$$

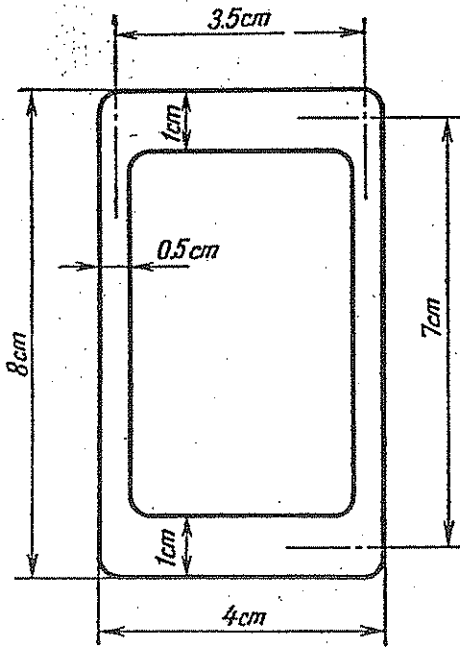
(٥-٣٩)

مثال ٥ - ٣. يراد تحديد الاجهاد الاعظم وزاوية الالتواء لقضيب انبوبي (الشكل ٥ - ١٥)، اذا كانت: $G = 8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ، $M_t = 150 \text{ kgm}$.
الحل. نحدد ($M_t = M$) حسب الصيغة (٥ - ٣٨):

$$\tau_{\max} = \frac{150 \times 10^3}{2 \times 3.5 \times 7 \times 0.5} = 612 \text{ kg/cm}^2.$$

ونحدد زاوية الالتواء لجزء طوله ١ متر، حسب الصيغة (٥ - ٣٩):

$$\varphi = \frac{150 \times 10^3 \times 100}{4 \times 3.5^2 \times 7^2 \times 8 \times 10^5} \left(\frac{2 \times 3.5}{1} + \frac{2 \times 7}{0.5} \right) = 0.027 \text{ radians}$$



الشكل ٥ - ١٥

مثال ٥ - ٤. يراد تحديد الاجهاد الاعظم وزاوية الالتواء لنفس ذلك القضيب، فيما اذا كان المقطع الجانبي مفتوحا (اي اذا كان المحيط مقطوعا في نقطة ما).

الحل. نحدد الاجهاد بواسطة الصيغة (٥ - ٣٤)، وقيمة η تأخذها 1.15 كما تؤخذ لمقطع المجرى (مقطع شكل ب)، فعند ذلك:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t b_{\max}}{\eta \frac{1}{3} \sum ab^3} = \frac{15 \times 10^3 \times 1}{1.15 \frac{1}{3} (2 \times 3.5 \times 1^3 + 2 \times 7 \times 0.5^3)} = \frac{15 \times 10^3}{3.36} = 4460 \text{ kg/cm}^2.$$

نلاحظ ان هذه النتيجة صحيحة فقط بالنسبة للقضيب المصنوع من الفولاذ السبائكي، الذي له حد تناسب عند القص البحت τ_p لا يقل عن مقدار $\tau_{\max}$ الذي حصلنا عليه، وذلك لان جميع الصيغ في هذا الباب صحيحة فقط في حدود تأثير قانون هوك.

نحدد زاوية الالتواء حسب الصيغة (٣٥ - ٥) :

$$\varphi = \frac{15 \times 10^3 \times 100}{8 \times 10^5 \times 3.36} = 0.56 \text{ radians.}$$

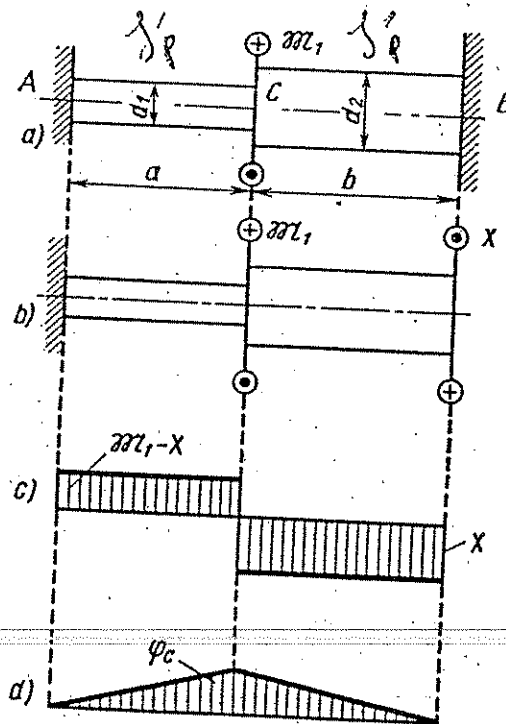
وبمقارنة نتائج المثالين المذكورين تتضح اهمية تفضيل القضبان ذات المقطع الجانبي المقفل عند مقارنتها بالقضبان المفتوحة المقطع الجانبي عند استخدامها في حالة الالتواء.

٤٢ - المسائل غير المحددة استاتيكا

تصادفنا عند الالتواء ايضا كما هي الحالة في الشد مسائل، لا يمكن حلها بمساعدة معادلات التوازن وحدها فقط. في مثل هذه المسائل يزيد عدد المجاهيل على عدد معادلات التوازن. ان طريقة حل مثل هذه المسائل، هي نفس الطريقة التي استعملت في حل المسائل غير المحددة استاتيكا عند الشد (الانضغاط).

وكمثال على ذلك، نبحث القضيب

المثبت الطرفين (الشكل ٥ - ١٦، a)
ان هذا القضيب غير محدد استاتيكا، وذلك لان الاستاتيكا يعطينا معادلة توازن واحدة لايجاد عزمين مفاعلين يظهران في الطرفين المثبتين للقضيب. نهمل احد الطرفين المثبتين ونعوّض عن تأثيره بعزم مجهول X (الشكل ٥ - ١٦، b). نحصل على المعادلة الاضافية (كما هو معروف، فالبها تسمى بمعادلة التشوه او معادلة الازاحات) من الشرط الذي يجعل زاوية دوران المقطع في الطرف



الشكل ٥ - ١٦

المثبت المهمل تساوى زاوية التواء القضيب تحت تأثير العزمين X و M_1 يساوى صفراً، أى $\varphi_B = 0$.

وفى النظام المحدد استاتيكيًا الذى حصلنا عليه، يحدث دوران المقطع B تحت تأثير العزم الخارجى والعزم X . وزاوية دوران المقطع B تحت تأثير العزم X تساوى:

$$\varphi'_B = \frac{Xa}{GJ'_p} + \frac{Xb}{GJ''_p}$$

حيث

$$J'_p \approx 0.1 d_1^4, \quad J''_p \approx 0.1 d_2^4.$$

وزاوية دوران المقطع B تحت تأثير العزم M_1 تساوى:

$$\varphi''_B = -\frac{M_1 a}{GJ'_p}.$$

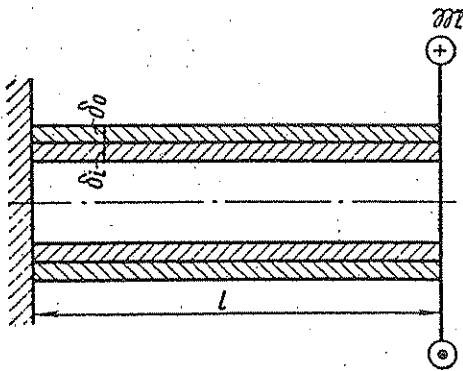
وبتعويض هذه القيم فى معادلة التشوهات، نحصل على:

$$\frac{Xa}{GJ'_p} + \frac{Xb}{GJ''_p} - \frac{M_1 a}{GJ'_p} = 0.$$

ومن هنا نحدد X .

ويمكن بعد هذا تحديد عزم اللى فى أى مقطع كان، وكذلك تخطيط الرسم البيانى لـ M_1 والرسم البيانى لزاويا الالتواء. فلاجل تخطيط الرسم البيانى لـ φ يكفى حساب زاوية دوران المقطع C ، وتساوى:

$$\varphi_C = \frac{Xb}{GJ''_p} = \frac{(M_1 - X)a}{GJ'_p}.$$



الشكل ٥ - ١٧

ان زوايا دوران المقطعين A ، و B تساوى صفراً، وبما ان زاوية الدوران لها علاقة خطية مع المسافة، فلذا يمكن ايصال النقاط التى نحصل عليها فى الرسم البيانى بخطوط مستقيمة. ان الرسوم البيانية لـ M_1 و φ مبينة فى الشكل

٥ - ١٦، c, d .

مثال ٥ - ٥. انبوب رقيق الجدران من مادة لها معامل G_i ، أدخل في انبوب آخر معاملته G_o . وقد ثبت أحد طرفي هذا التركيب، بينما أثر على الطرف الثاني عزم خارجي M شمل تأثيره كلا الانبوبين (الشكل ٥ - ١٧). يراد تحديد عزوم اللي التي تظهر في المقاطع العرضية للانبوبين. الحل. عزما اللي المجهولين هما: في الانبوب الداخلي $M_{i,i}$ وفي الانبوب الخارجي $M_{i,o}$.

هناك معادلة واحدة للتوازن:

$$(I) \quad M_{i,i} + M_{i,o} = M$$

ان هذه المسألة غير محددة استاتيكا وذلك لحاجتها الى مجهول اضافي واحد. اننا نضع معادلة التشوهات بمساواة زوايا دوران المقاطع في الطرف الايمن لكل من الانبوبين (المساوية للزوايا الكاملة لالتواء الانبوبين):

$$(II) \quad \varphi_i = \varphi_o$$

$$\frac{M_{i,i} l}{G_i J_{p,i}} = \frac{M_{i,o} l}{G_o J_{p,o}}$$

J_{pi} - عزم القصور الذاتي القطبي لمقطع الانبوب الداخلي، J_{po} - عزم القصور الذاتي القطبي لمقطع الانبوب الخارجي. وتحدد هذه المقادير كما في المقاطع الحلقية، حسب الصيغ المعطاة في البند ٢٩. ولحساب زوايا الالتواء عندما يكون سمك الجدران قليلا، يمكن استعمال الصيغة (٥ - ٣٩)، حيث انها في حالة كون السمك δ ثابتا، تأخذ الشكل التالي:

$$\varphi = \frac{M_i l_s}{4G\omega^2\delta} = \frac{4M_i l}{G\pi d^3\delta}$$

حيث d معدل قطر الانبوب.

$$d = \frac{d_i + d_o}{2}$$

$s = \pi d$ - طول المحيط الاوسط لمقطع الانبوب.

ومن المعادلتين I و II تحدد عزوم اللي في المقاطع العرضية للانبوبين، وبعد ذلك، حسب الصيغة (٥ - ٣٧) تحدد الاجهادات. وعندما يكون سمك الجدار كبيرا، يجب استعمال الصيغ المعطاة في البند ٣٥، لتحديد الاجهادات.

٤٣ - تركيز الاجهادات

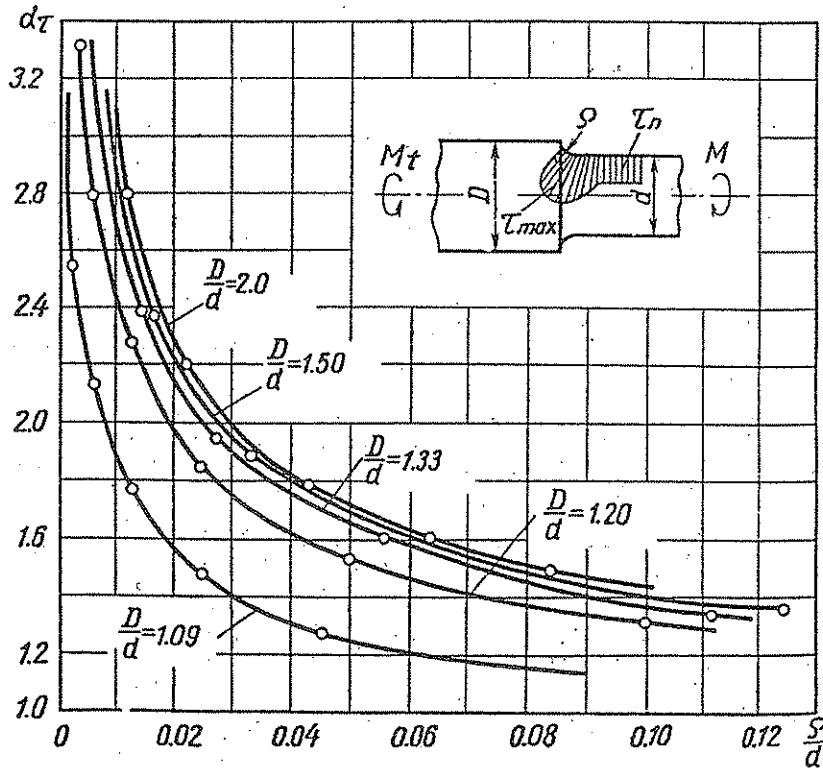
عند التغير المفاجئ لمحيط المقطع العرضي او الطولي للعمود يظهر تركيز الاجهادات. ويحسب تأثير تركيز الاجهادات بواسطة معامل التركيز الذي يحدد اما نظريا بطرق نظرية المرونة واما عن طريق التجارب.

وقد اعطى في الشكل ٥ - ١٨ رسم بياني لتحديد مقدار المعامل النظري لتركيز الاجهادات α_τ عند التواء العمود الذي تتصل اجزاؤه بمنحنى اتصال نصف قطره ρ . وكما نرى فعند الانتقالات المفاجئة، اى عندما تكون قيم $\frac{\rho}{d}$ صغيرة، فان ترددات α_τ تزداد بكثرة.

وعندما يكون معامل تركيز الاجهادات معلوما، فان الاجهاد المناسب (اجهاد القص) الاكبر للقضيب ذي المقطع العرضي الدائري، يحدد حسب الصيغة:

$$\tau_{\max} = \alpha_\tau \tau_n = \alpha_\tau \frac{M_t}{W_p}$$

حيث $\tau_n = \frac{M_t}{W_p}$ - الاجهاد الاسمي المحسوب بالنسبة لاصغر مقطع.



الشكل ٥ - ١٨

ان الحالات التى يؤخذ فيها تأثير الاجهادات فى الاعتبار هى :
 أ - عند تأثير الاحمال الاستاتيكية بالنسبة للمواد المنخفضة اللدونة
 وللمواد القابلة للتحطم الهش.
 ب - عند تأثير الاحمال المتغيرة (حساب الطاقة) بالنسبة لجميع
 المواد.

ولاجل التقليل من تركيز الاجهادات ، يجب الابتعاد عن التغيرات المفاجئة
 فى محيط المقطع ، وذلك باستعمال منحنيات انتقالية باكبر نصف قطر ممكن
 فى النقاط التى يحدث فيها التغير التدريجى فى قطر القضيب.

٤٤ - الاشكال المعقولة للمقاطع عند الالتواء

ان المقطع المعقول من مقطعين لهما عزم مقاومة قطبى متساو (او $\frac{W_p}{F}$ متساو
 فى حالة المقطع غير الدائرى) ، ولهما نفس عزم الى المسموح بهاء
 هو ذلك المقطع الاقل مساحة ، اى الذى يضمن اقل استهلاك للمواد. وبما
 ان نسبة $\frac{W_p}{F}$ (او $\frac{W_t}{F}$) تعتبر كمية بعدية فلاجمل مقارنة المقاطع المختلفة يكون
 من السهل استعمال احد المقادير غير البعدية :

$$w_p = \frac{W_p}{\sqrt{F^3}}$$

(وفى المقطع غير الدائرى يكون $w_t = \frac{W_t}{\sqrt{F}}$) والذى يمكن تسميته بوحدة
 عزم المقاومة عند الالتواء.

وتوجد فى الجدول ٥ - ٣ قيم w_t لبعض المقاطع.

وكما يتضح فان مقطع المجرى (مقطع شكل —) والمقطع شكل ١
 والمقاطع الضيقة المستطيلة هى الاقل اقتصادا عند الالتواء ، اما المقاطع
 الاكثر اقتصادا فهى المقاطع الدائرية ، الحلقية ، وخاصة عندما يكون سمك
 الجدار قليلا ، اى عند ما تكون قيم $c = \frac{d}{D}$ قريبة من الوحدة.

لنقارن الآن وزن القضبان ذات المقاطع الانبوية G_t بوزن القضبان ذات
 المقطع الاصم G_s ، عند مختلف مقادير $c = \frac{d}{D}$ على شرط ان تكون المادة

متساوية. ومن مساواة العزوم القطبية للمقاومة في المقاطع الصماء الحلقية، يكون لدينا:

$$\frac{\pi d_1^3}{16} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4).$$

وللحصول على متانة متساوية يجب مراعاة الشرط التالي:

$$D = \frac{d_1}{\sqrt[3]{1 - c^4}}.$$

ان نسبة مساحات المقاطع (وكذلك الاوزان) متساوي:

$$\frac{G_T}{G_S} = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) : \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{D^2 (1 - c^2)}{d_1^2}$$

ونعوض هنا قيمة D ، التي حصلنا عليها من شروط تساوي المتانة فنحصل على:

$$G_T : G_S = \frac{1 - c^2}{3 \sqrt{(1 - c^4)^2}}$$

الجدول ٣-٥

العزوم النوعية للمقاومة عند التواء القضبان المختلفة المقاطع

نوع المقطع	w_t
مقطع على شكل مجرى (مقطع شكل —)	٠,٠٥ - ٠,٠٤
مقطع شكل I	٠,٠٧ - ٠,٠٥
مقطع مستطيل عند $\frac{a}{b} = 10$	٠,١
مقطع مستطيل عند $\frac{a}{b} = 2$	٠,١٨
مربع	٠,٢١
مقطع دائري اصم	٠,٢٨
مقطع دائري حلقى $c = \frac{d}{D} = 0.5$	٠,٣٧
مقطع دائري حلقى $c = 0.9$	٠,١٦

توجد في الجدول ٥ - ٤ قيم $G_S : G_T$ المستخرجة حسب الصيغة الأخيرة وعند مختلف قيم $c = \frac{d}{D}$. ويتضح من الجدول، ان استعمال القضبان الانبوبية الرقيقة الجدران يضمن اقتصادا كبيرا في المعادن.

الجدول ٥-٤

نسبة اوزان القضبان ذات المقاطع الدائرية الصماء والحلقية ، المتساوية المتانة عند الالتواء

c	٠	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,٥	٠,٦	٠,٧	٠,٨	٠,٩
$\frac{G_T}{G_S}$	١	٠,٩٩	٠,٩٦	٠,٩٢	٠,٨٥	٠,٧٩	٠,٧٠	٠,٦١	٠,٥١	٠,٣٩

ويمكن استعمال المقدار اللابعدي التالي، كمعيار لاقتصادية المقطع، عند اختيار المقاطع حسب الصلابة:

$$p = \frac{J_p}{F^2}$$

(او $j_i = \frac{J_i}{F^2}$ ، للمقاطع غير الدائرية)، التي يمكن ان تسمى بوحدة القصور G_S

الجدول ٥-٥

j_i	نوع المقطع
٠,٠١١ - ٠,٠١٠	مقطع على شكل مجرى (مقطع شكل —)
٠,٠١٥ - ٠,٠٠٩	مقطع شكل I
٠,٠٣١	مقطع مستطيل $\frac{a}{b} = 10$
٠,١١٥	مقطع مستطيل $\frac{a}{b} = 2$
٠,١٤	مربع
٠,١٦	مقطع دائري اصم
٠,٢٦٤	مقطع دائري حلقى $c = \frac{d}{D} = 0.5$
١,٥٢	مقطع دائري حلقى $c = 0.9$

الذاتي القطبي او الخاصة الهندسية النوعية لصلابة الالتواء (جسوء الالتواء) .
وتوجد فى الجدول ٥ - ٥ القيم z لبعض المقاطع الكثيرة الانتشار.
وكما نرى، فعند الحساب الذى يتعلق بالصلادة، فان افضلية استعمال
المقاطع الحلقية ذات الجدران الرقيقة بمقارنتها مع انواع المقاطع الاخرى،
تردد بصورة اكثر. وتوجد فى الجدول ٥ - ٦ مقارنة لاوزان القضبان ذات
الجدول ٥-٦

c	٠	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,٥	٠,٦	٠,٧	٠,٨	٠,٩
$\frac{G_T}{G_S}$	١,٠	٠,٩٩	٠,٩٦	٠,٩٢	٠,٨٥	٠,٧٨	٠,٦٩	٠,٥٨	٠,٤٦	٠,٣٢

المقاطع الدائرية الحلقية والصماء، المتساوية الجسوء (الصلابة) حيث G_T
وزن القضيب ذى المقطع الحلقى الانبوبى، G_S - وزن القضيب ذى المقطع
الدائرى الاصل.

وبمقارنة هذا الجدول بالجدول ٥ - ٤، نرى ان استعمال القضبان
الانبوبية ذات الجدران الرقيقة عند الحساب الذى يتعلق بالصلابة، يضمن
اقتصادا كبيرا آخر فى المادة.